KOMPLEKSNA ANALIZA

Pavle Pandžić, 7. predavanje

Prisjetimo se:

$z_0 \in \Omega$ je nultočka konačnog reda $m \in \mathbb{N}_0$ funkcije $f \in H(\Omega)$ ako je

$$f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{i} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Posebno, ako je $f(z_0) \neq 0$, z_0 je nultočka reda 0.

z_0 je nultočka od f beskonačnog reda ako je

$$f^{(k)}(z_0) = 0, \quad \forall k \geq 0.$$

Teorem (o izoliranosti nultočke konačnog reda)
Ako je $f \in H(\Omega)$ i $z_0 \in \Omega$ nultočka od f konačnog reda $m \geq 0$, onda postoji $r > 0$ takav da je $K(z_0, r) \subseteq \Omega$ i postoji $g \in H(K(z_0, r))$ tako da je

(1) $g(z) \neq 0$ za sve $z \in K(z_0, r)$,

(2) $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$ za sve $z \in K(z_0, r)$.

Posebno, $f(z) \neq 0$ za sve $z \in K(z_0, r) \setminus \{z_0\}$, pa je z_0 izolirana nultočka od f.

Teorem (Princip jedinstvenosti holomorfne funkcije)
Neka je Ω područje i $f \in H(\Omega)$. Neka je

$$N = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}.$$

Ako N ima gomilište u Ω, tj. ako postoji $w \in \Omega$ takav da svaka okolina od w siječe $N \setminus \{w\}$, tada je $f(z) = 0$ za sve $z \in \Omega$.

Korolar
Neka su $f, g \in H(\Omega)$, pri čemu je Ω područje.

Ako skup

$$\{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$$

ima gomilište u Ω, tada je $f = g$.

Teorem (Cauchyjeve ocjene koeficijenata Taylorovog reda) Neka je $f \in H(\Omega)$, te $z_0 \in \Omega$ i $R > 0$ takvi da je $K(z_0, R) \subseteq \Omega$.

Tada za svaki $r < R$ vrijedi

$$\left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| \leq \frac{M(r)}{r^n}, \tag{1}$$

pri čemu je $M(r) = \max\{|f(w)| : w \in \partial K(z_0, r)\}$.

Dokaz. Prema generaliziranoj Cauchyjevoj integralnoj formuli je

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw,$$

gdje je $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = z_0 + re^{it}$.

Primjenom leme o fundamentalnoj ocjeni integrala slijedi

$$\begin{aligned} \left| \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \right| &= \frac{1}{2\pi} \max_{w \in \gamma} \left\{ \frac{|f(w)|}{|w - z_0|^{n+1}} \right\} \ell(\gamma) \\ &= \frac{2r\pi}{2\pi} \max_{w \in \gamma} \left\{ \frac{|f(w)|}{r^{n+1}} \right\} = \frac{M(r)}{r^n}. \end{aligned}$$

Sjetimo se da smo pomoću generalizirane CIF dokazali Liouvilleov teorem: svaka cijela ograničena funkcija je konstantna.

Taj se teorem može dobiti i iz Cauchyjevih ocjena. Štoviše, iz njih se može dobiti sljedeći općenitiji teorem:

Teorem Neka je f cijela funkcija takva da postoji $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sa svojstvom da je

$$|f(z)| \le |z|^m, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Tada je f polinom stupnja manjeg ili jednakog od m.

Dokaz. Neka je $r > 0$ proizvoljno odabran. Uz oznake kao u prethodnom teoremu i izbor $z_0 = 0$, iz pretpostavke slijedi

$$M(r) = \max\{|f(w)| : w \in \partial K(z_0, r)\} \le r^m.$$

Prema (1) imamo

$$\left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right| \le \frac{r^m}{r^n} = r^{m-n}, \quad \forall n \ge 0.$$

S obzirom da je r bio proizvoljno odabran pozitivan broj, te da je $\lim_{r\to\infty} r^{m-n} = 0$ za $n > m$, zaključujemo da je

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n > m.$$

Sada iz Teorema o Taylorovom razvoju holomorfne funkcije slijedi da je

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = \sum_{n=0}^{m} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

za sve $z \in \mathbb{C}$. □

Korolar (Liouvilleov teorem) Neka je f ograničena cijela funkcija. Tada je f konstanta.

Dokaz. Neka je $M > 0$ takav da je $|f(z)| \le M$ za svaki $z \in \mathbb{C}$.

Primijenimo prethodni teorem na funkciju $g(z) = f(z)/M$; g zadovoljava uvjet teorema za $m = 0$.

Slijedi da je g konstanta pa je i f konstanta. □

Sada ćemo pomoću Liouvilleovog teorema dokazati osnovni teorem algebre.

Osnovni teorem algebre Neka je

$$p(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

polinom stupnja $n \geq 1$.

Tada postoji $z_0 \in \mathbb{C}$ takav da je $p(z_0) = 0$.

Drugim riječima, svaki polinom stupnja većeg ili jednakog od 1 ima bar jednu nultočku u $\mathbb{C}$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $p(z) \neq 0$ za sve $z \in \mathbb{C}$.

Tada je dobro definirana funkcija

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \frac{1}{p(z)}.$$

Očito, f je cijela funkcija.

Tvrdimo da je

$$\lim_{|z|\to\infty} f(z) = 0.$$

Zaista,

$$\lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|p(z)|} = \lim_{|z|\to\infty} \frac{1}{|z|^n |1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{a_0}{z^n}|} = \frac{1}{+\infty \cdot 1} = 0.$$

Sada po definiciji limesa slijedi da za $\varepsilon = 1$ postoji $R > 0$ takav da

$$z \in \mathbb{C}, |z| > R \quad \Rightarrow \quad |f(z)| < 1.$$

S druge strane, f je neprekidna na kompaktnom skupu $\overline{K}(0, R)$, pa postoji $M > 0$ takav da je

$$|f(z)| \leq M, \quad \forall z \in \mathbb{C}, |z| \leq R.$$

Ako označimo $M_1 = \max\{1, M\}$ tada vrijedi

$$|f(z)| \leq M_1, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

dakle, f je ograničena cijela funkcija.

Prema Louvilleovom teoremu je tada f konstantna funkcija. No tada je i p konstantna funkcija, što ne može biti jer je p polinom stupnja $n \geq 1$. □

Vidjeli smo da se funkcija f koja je holomorfna na krugu $K(z_0, r)$ može na tom krugu razviti u Taylorov red.

Sada ćemo vidjeti da se funkcija koja nije nužno holomorfna na krugu nego na kružnom vijencu oko z_0 može razviti u općenitiji red, tzv. Laurentov red, koji uključuje pozitivne i negativne potencije od $(z - z_0)$.

Kažemo da red kompleksnih brojeva $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n$ konvergira ako konvergiraju redovi $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ i $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}$.

U tom slučaju je suma tog reda

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n.$$

Teorem (o Laurentovom razvoju)
Neka je $V = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ kružni vijenac i $f \in H(V)$.

Tada je

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in V.$$

Pri tome su koeficijenti a_n određeni sa

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}} dw,$$

gje je γ bilo koja pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u z_0 radijusa $\rho \in < r, R >$.

Dokaz. Neka je $z \in V$. Prema Cauchyjevoj integralnoj formuli za kružni vijenac imamo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

pri čemu su γ_1 i γ_2 kružnice sa središtem u z_0 radijusa ρ_1 i ρ_2, redom, tako da je $r < \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2 < R$.

Neka je $F : V \to \mathbb{C}$ funkcija definirana kao

$$F(w) = \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}.$$

Očito je $F \in H(V)$. Iz dokaza CIF za kružni vijenac slijedi da je

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} F(w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} F(w) dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma F(w) dw = a_n$$

gdje je γ kao u iskazu teorema i $n \in \mathbb{Z}$.

Za sve $w \in \gamma_2$ je

$$\left| \frac{z - z_0}{w - z_0} \right| < 1,$$

pa je

$$\frac{1}{w - z} = \frac{1}{w - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{w - z_0}} =$$
$$\frac{1}{w - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{w - z_0} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(w - z_0)^{n+1}}.$$

S obzirom da u gornjem redu imamo uniformnu konvergenciju po w (uz istu argumentaciju kao u dokazu Teorema o Taylorovom razvoju), slijedi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w)}{w - z} dw =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(w) dw}{(w - z_0)^{n+1}} \right) (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Za sve $w \in \gamma_1$ je
$$\left|\frac{w-z_0}{z-z_0}\right| < 1,$$
pa slično kao maloprije imamo
$$\frac{1}{w-z} = \frac{-1}{z-z_0}\frac{1}{1-\frac{w-z_0}{z-z_0}} =$$
$$-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}} = -\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(z-z_0)^k}{(w-z_0)^{k+1}}.$$

Odatle slijedi
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)}{w-z}dw = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f(w)dw}{(w-z_0)^{n+1}}\right)(z-z_0)^n =$$
$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n.$$

Lokalno uniformna konvergencija će biti dokazana u sljedećem teoremu. □

Ako je $f \in H(V)$ tada označimo
$$f_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n, \quad \forall z \in V,$$
$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad \forall z \in V.$$

f_1 nazivamo singularni dio Laurentovog razvoja funkcije f, a f_2 regularni dio Laurentovog razvoja funkcije f. Jasno je da vrijedi $f_1, f_2 \in H(V)$.

Teorem (o karakterizaciji Laurentovog razvoja I)
Neka je $V = \{z \in \mathbb{C} : r < |z-z_0| < R\}$ kružni vijenac i $f \in H(V)$.

Tada vrijedi

1. Red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergira lokalno uniformno na $K(z_0, R)$ i $f_2 \in H(K(z_0, R))$.

2. Red $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r)$ i $f_1 \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r))$.

3. $f(z) = f_1(z) + f_2(z)$ za sve $z \in V$.

4. $\lim_{|z|\to\infty} f_1(z) = 0$.

Dokaz. Za prve dvije tvrdnje koristimo Abelovu lemu.

(1) Neka je $z' \in V$. Prema Teoremu o Laurentovom razvoju, red brojeva $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z'-z_0)^n$ konvergira, pa prema Abelovoj lemi red potencija $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ konvergira lokalno uniformno na $K(z_0, |z'-z_0|)$.

Kako je $z' \in V$ proizvoljan, slijedi tvrdnja. Prema Teoremu o holomorfnosti reda potencija slijedi da je $f_2 \in H(K(z_0, R))$.

(2) Uvedimo supstituciju $w = \frac{1}{z-z_0}$. Tada se red funkcija $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ pretvara u red potencija $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$ koji konvergira na kružnom vijencu $V(0; \frac{1}{R}, \frac{1}{r})$.

Kao u (1) dokažemo da red potencija $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}w^n$ konvergira lokalno uniformno na krugu $K(0, \frac{1}{r})$, što znači da red funkcija $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-z_0)^n$ konvergira lokalno uniformno na $\mathbb{C} \setminus \overline{K}(0, r)$.

Prema Teoremu o holomorfnosti reda potencija slijedi da je $f_1 \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r))$.

Treća i četvrta tvrdnja su očite. □

Teorem (o karakterizaciji Laurentovog razvoja II)

Neka je $V = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$ kružni vijenac i $f \in H(V)$.

Neka su g_1 i g_2 funkcije za koje vrijedi

1. $g_2 \in H(K(z_0, R))$.
2. $g_1 \in H(\mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r))$.
3. $f(z) = g_1(z) + g_2(z)$ za sve $z \in V$.
4. $\lim_{|z|\to\infty} g_1(z) = 0$.

Tada je $f_1 = g_1$ i $f_2 = g_2$.

Dokaz. Definiramo funkciju

$$F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad F(z) = \begin{cases} g_2(z) - f_2(z), & |z - z_0| < R; \\ f_1(z) - g_1(z), & |z - z_0| > r. \end{cases}$$

Zbog prethodnog teorema i (3) slijedi da je F dobro definirana. Također, F je cijela funkcija.

Iz $\lim_{|z|\to\infty} F(z) = 0$ slijedi da je F ograničena funkcija. (Naime, po definiciji limesa, za $\varepsilon = 1$ postoji $\rho > 0$ takav da je $|F(z)| < 1$ za sve z takve da je $|z| > \rho$. Također, postoji $M > 0$ takav da je $|F(z)| \le M$ za sve $z \in \overline{K}(0, \rho)$.)

Prema Liouvilleovom teoremu sada slijedi da je F konstantna funkcija, a kako je njen limes u beskonačnosti jednak 0, to je $F = 0$. Slijedi tvrdnja. □

Odavde slijedi jedinstvenost koeficijenata Laurentovog razvoja.

Naime, neka je

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n, \quad \forall z \in V.$$

Tada prema prethodnom teoremu imamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n = f_2(z), \quad \forall z \in K(z_0, R)$$

i

$$\sum_{n=-1}^{-\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} b_n(z-z_0)^n, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K}(z_0, r).$$

Sada za $n \geq 0$ vrijedi $a_n = \frac{f_2^{(n)}(z_0)}{n!} = b_n$.
Za $n = -k$, $k \geq 1$, uz supstituciju $w = \frac{1}{z-z_0}$ imamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}w^k = \sum_{k=1}^{\infty} b_{-k}w^k = f_1(w), \quad \forall w \in K(0, \frac{1}{r}).$$

Slijedi da je $a_{-k} = \frac{f_1^{(k)}(0)}{k!} = b_{-k}$. Dakle je

$$a_n = b_n \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$